الاشتقاق

I- انشطة:

1) النشاط 1:

نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+2}$

1) بين ان الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر

2) حدد معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في نقطة التي افصولها العدد 0

3) اعط الدالة التالفية المماسة للدالة f عند الصفر

4) احسب قيمة مقربة للعدد $f(0;002)$

2) النشاط 2:

نعتبر الدالة g المعرفة بمايلي :
$$\begin{cases} g(x)=4x^2+x\,;x\geq 0 \\ g(x)=\dfrac{2(1-\cos x)}{x};x\prec 0 \end{cases}$$

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة g على يمين ويسار الصفر

2) اعط تاويلا هندسا للنتيجة المحصل عليها

3) النشاط 3:

نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-2};x\succ 2 \\ f(x)=x^2+x-1;x\leq 2 \end{cases}$$

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين ويسار $x_0=2$

4) النشاط 4:

يعطي الشكل التالي منحنى الدالة f المعرفة على المجال $[-4;7]$:

*

اعتمادا على المبيان السابق احب على الاسئلة التالية:

1) احسب : $f(0)$ و $f'(0)$ و $f'(4)$ و $f'(6)$ و $f'(-2)$

2) حدد معادلة المماس (D) للمنحنى في النقطة التي افصولها العدد 6

3) احسب : $f_d'(2)$ و $f_g'(2)$. هل الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة 2

4) حل في المجال $[-4;7]$ المتراجحة : $f'(x)\geq 0$

5) النشاط 5:

احسب النهايتين التاليتين : $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$

6) النشاط 6:

احسب الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية:

$f(x)=7x^3-5x^2+x-2$, $g(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^3+2}$, $h(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$, $k(x)=(x^2+1)\sqrt{x}$

7) النشاط 7:

نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x)=x^3-6x+5$

1) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ادرس اشارتها

2) اعط جدول تغيرات الدالة f

3) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ادرس اشارتها

II- تعاريف وخاصيات

1) العدد المشتق

تعريف:

لتكن f دالة عددية و I مجال مفتوح ضمن حيز تعريفها و a عنصر من I

تكون الدالة f قابلة للاشتقاق في a إذا وفقط إذا كان : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

حيث العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة a ونرمزله ب $f'(a)$ ونكتب : $f'(a) = l$

ملاحظة: f قابلة للاشتقاق في a إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي l بحيث: $\lim_{x \to 0} \frac{f(a+h)-f'(a)}{h} = l$

2) التأويل الهندسي للعدد المشتق

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في a فان المستقيم الذي معادلته : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ هو المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A التي افصولها a

*

ملاحظة: العدد $f'(a)$ هو معامل الموجه للمماس (T) للدالة f في النقطة A

3) الدالة التالفية المماسة لدالة f

تعريف:

لتكن f قابلة للاشتقاق عل مجال I و a عنصر من I

الدالة المعرفة بمايلي: $x \mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ تسمى الدالة التالفية المماسة للدالة f في النقطة a

4) المعادلة التفاضلية:

اذا كان لدينا : $y = f(x)$ فاننا نكتب اصطلاحا: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ أي $f'(x)dx = dy$ هذه الكتابة تسمى الكتابة التفاضلية

5) الاشتقاق على اليمين – الاشتقاق على اليسار:

أ) الاشتقاق على اليمين:

تعريف:

لتكن f دالة معرفة على المجال $[a;a+\alpha[$ حيث α عدد حقيقي موجب قطعا

تكون الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في a اذا كان يوجد عدد حقيقي l بحيث:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \succ a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \quad \text{او} \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \succ 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في a ونرمزله بالرمز $f_d'(a)$ ونكتب : $f_d'(a) = l$

التاويل الهندسي:

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة a فان المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس معادلته:

$$y = f_d'(a)(x-a)+f(a)$$

ب) الاشتقاق على اليسار:

تعريف:

لتكن f دالة معرفة على المجال $]a-\alpha;a]$ حيث α عدد حقيقي موجب قطعا

تكون الدالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في a اذا كان يوجد عدد حقيقي l بحيث:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \prec a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \quad \text{او} \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \prec 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في a ونرمزله بالرمز $f_g'(a)$ ونكتب : $f_g'(a) = l$

التاويل الهندسي:

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة a فان المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس معادلته:

$$y = f_g'(a)(x-a)+f(a)$$

ملاحظة:

اذا كان : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ فان المنحنى (C_f) يقبل مماسا او(نصف مماس) موازي لمحور الاراتيب

6) الدالة المشتقة:

أ) مشتقة دوال اعتيادية:

الدالة f	الدالة المشتقة f'	مجموعة تعريفها

$\mathbb{R}$	0	a
$\mathbb{R}$	1	X
$\mathbb{R}$	a	ax
$\mathbb{R}$	a	$ax+b$
$\mathbb{R}$	$2x$	X^2
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	X^n
$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{N}\right\}\mathbb{R}$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

ب) العمليات على الدوال المشتقة:

لتكن u و v دالتين معرفتين على مجال I:

الدالة المشتقة	الدالة
$u+v$	$u+v$
$\alpha u'$	αu
$u'v+uv'$	uv
$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}\quad(u\neq 0)$
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}\quad(v\neq 0)$
$nu'u^{n-1}$	$u^n\quad(n\in\mathbb{N}^*)$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u\succ 0)\quad\sqrt{u}$

7) مشتقة مركب دالتين:

خاصية:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على I و g دالة قابلة للاشتقاق على مجال J بحيث: $f(I)\subset J$ و a عنصر من I

- ❖ الدالة $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في النقطة a ولدينا : $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\times f'(a)$
- ❖ الدالة $g\circ f$ قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا : $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$ لكل x من I

امثلة:

مثال1:

نعتبر الدالة h المعرفة بمايلي: $h(x)=\cos(ax+b)$

نضع: $f(x)=ax+b$ **و** $g(x)=\cos x$

لدينا: $h(x)=g\circ f(x)$ و $f'(x)=a$ و $g'(x)=-\sin x$

اذن: $h'(x)=(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)=g'(ax+b)\times a=-a\sin(ax+b)$

مثال2:

بين ان : $[\sin(ax+b)]'=a\cos(ax+b)$

مثال 3:

بين ان : $\left[\sqrt{x^2+2}\right]'=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

8) مشتقة دالة عكسية:

خاصية:

ليكن I مجال ضمن $\mathbb{R}$ و f دالة متصلة ورتيبة قطعا و a عنصرمن I

❖ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في a و $f'(a)\neq 0$ فان الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(a)$

ولدينا: $\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right)=\dfrac{1}{f'(a)}$ لكل a من I

❖ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I وكان : $\forall x\in I ; f'(x)\neq 0$

ولدينا: $\left(f^{-1}\right)(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ $\quad \forall x\in f(I)$

مثال:

نعتبر الدالة: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$

احسب: $\left(f^{-1}\right)'(0)$

9) مشتقة الدالة: $(n\in\mathbb{N}^*)x\mapsto\sqrt[n]{x}$ **:**

خاصية:

ليكن n عنصر من $\mathbb{N}^*$ الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

10) مشتقة الدالة : $(n\in\mathbb{N}^*)x\mapsto\sqrt[n]{u(x)}$

ليكن n عنصر من $\mathbb{N}^*$. u دالة موجبة و قابلة للاشتقاق I.

الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا:

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\left(\left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}u'(x)\times\left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

ملاحظات: ليكن n عنصر من $\mathbb{N}^*$.

لكل x من $]0;+\infty[$: $\quad \left(\sqrt[n]{x}\right)'=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$

لكل x بحيث $u(x)\succ 0$: $\quad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$

امثلة:

حدد الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية:

$f_1(x)=6\sqrt[3]{x}-5 \quad , \quad f_2(x)=\sqrt[3]{x^2+x+1} \quad , \quad f_3(x)=\sqrt[4]{3x^5-2x^3+x-3}$

الدوال الاصلية

I - دالة اصلية لدالة على مجال: Fonction primitive d'une fonction

تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
كل دالة F قابلة للاشتقاق على I ومشتقتها هي الدالة f تسمى دالة أصلية لدالة f على المجال I
$(\forall x \in I) F'(x) = f(x)$

بعبارة اخرى :

F دالة اصلية لدالة f على I اذا وفقط اذا كانت الدالة F قابلة للاشتقاق على I
ولدينا: $F'(x) = f(x)$ لكل x من I

امثلة:

مثال 1:

❖ لتكن f الدالة المعرفة بمايلي: $f(x) = x^2 + 1$

الدالة F بحيث: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق $F'(x) = f(x)$

اذن: F دالة اصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

مثال2:

❖ نعتبر الدالة: $g(x) = x + \cos x$

الدالة G بحيث: $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق $G'(x) = g(x)$

اذن: G دالة اصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

II- دوال اصلية لدالة:

خاصية 1:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و F دالة أصلية للدالة f على I
الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال المعرفة على I بمايلي: $x \mapsto F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي

خاصية2:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و x_0 من I و y_0 عدد حقيقي معلوم
اذا كانت الدالة f تقبل دالة اصلية على I فانه توجد دالة اصلية وحيدة G بحيث: $G(x_0) = y_0$

مثال:

❖ لتكن f الدالة المعرفة بمايلي: $f(x) = 2x + 1$

الدوال الاصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي: $F(x) = x^2 + x + k$ حيث k عدد حقيقي

لنحدد الدالة الاصلية للدالة f التي تحقق الشرط $F(2) = 0$

$F(2) = 0$ يعني $6 + k = 0$ أي : $k = -6$

اذن الدالة الاصلية الوحيدة للدالة f التي تحقق الشرط : $F(2) = 0$ هي : $F(x) = x^2 + x + k$

خاصية 3:

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية

خاصية4:

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I و α عدد حقيقي:
اذا كانت F و G دالتان اصليتان على التوالي للدالتين f و g على I فان:
❖ $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على I
❖ λF دالة أصلية للدالة (αf) على I

II- العمليات على الدوال الاصلية

1) جدول الدوال الاصلية للدوال الاعتيادية

الدالة f معرفة على I	الدالة الأصلية f معرفة على I	المجال I
a	$ax + k$	$\mathbb{R}$

x	$\frac{1}{2}x^2+k$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3+k$	$\mathbb{R}$
x^3	$\frac{1}{4}x^4+k$	$\mathbb{R}$
$x^r\ (r\in\mathbb{Q};r\neq -1)$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+k$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+k$	$]0;+\infty[$ او $]-\infty;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$\sin x+k$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+k$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+k$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k'\pi;\frac{\pi}{2}+k'\pi\right[;(k'\in\mathbb{Z})$

لتكن u و v دالتين معرفتين على مجال I:

الدالة f معرفة على I	الدالة الأصلية f معرفة على I	المجال I
$u'+v'$	$u+v+k$	
$u'v+uv'$	$uv+k$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+k$	$u\neq 0$
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}+k$	$v\neq 0$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+k$	$I=D_u$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	$u\succ 0$
$u'(ax+b)$	$\frac{1}{a}u(ax+b)+k$	
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+k$	

تمرين تطبيقي:

حدد دالة أصلية للدالة f على المجال I التالية:

1) $I=\mathbb{R};f(x)=x^4+4x^3+\frac{1}{3}x^2+1$

2) $I=]-\infty;0[;f(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^2}+3$

3) $I=\mathbb{R};f(x)=(x+1)^3$

$$I=\mathbb{R};f(x)=2x\left(x^2+1\right)^7 \quad (4$$

$$I=\left]-\infty;4\right[;f(x)=\frac{2}{\left(x-4\right)^2} \quad (5$$

$$I=\left]-1;3\right[;f(x)=\frac{x-1}{\left(x^2-2x-3\right)^4} \quad (6$$

$$I=\mathbb{R};f(x)=\cos(3x)+\sin(2x) \quad (7$$

$$I=\mathbb{R};f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right) \quad (8$$

$$I=\mathbb{R};f(x)=\cos(x)\left(3\sin x+\sin^2 x\right) \quad (9$$

$$I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right];f(x)=1-\frac{2}{\cos^2 x} \quad (10$$