دروس الدعم و التقوية
مراجعة السندباد حي الأزهر

تمارين حول المتتاليات العددية

المـــــــادة: الرياضيات	2bac: PC&SVT	Pr : Naciri

التمرين 1 :

لتكن المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و

$u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n+3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1 – بين أن : $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2 – نضع : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n.

ب. بين أن : $u_n = \dfrac{2}{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 2 :

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بما يلي : $U_0 = e-1$ و $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \sqrt{U_n+1}-1$

1 – أ. بين أن : $U_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب. بين أن المتتالية (U_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربة.

2 – نعتبر (V_n) المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \ln(1+U_n)$

أ. بين أن (V_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول ثم حدد تعبير V_n .

ب. استنتج U_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (U_n) .

التمرين 3

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و

$u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n+3}$ لكل n من IN .

1) بين أن : $u_n > 1$ لكل n من IN .

2) نضع : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ لكل n من IN .

أ – بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

ب- بين أن : $u_n = \dfrac{2}{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$ لكل n من IN ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين4:

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث :

$a_0 = 2$ و $b_0 = 4$ ، $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n) \end{cases}$

1 – نضع لكل n من $\mathbb{N}$. $U_n = a_n + b_n$

بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة.

2 – لتكن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بـ :

$(\forall n \in \mathbb{N}) : V_n = a_n - b_n$

أ. بين أن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

ب. عبر عن : V_n بدلالة n ثم احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

3 – عبر عن a_n و b_n بدلالة n ثم استنتج أن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لهما نفس النهاية.

4 – نضع : $S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$

احسب S_n بدلالة n ثم احسب نهاية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

التمرين 5 :

(U_n) المتتالية المعرفة كالتالي :

$U_0 = 0$ و $\forall n \in \mathbb{N} \; U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 4}$

1 – أثبت بالترجع أن $0 < U_n < 1$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

2 – أثبت أن (U_n) تزايدية.

3 – لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بـ :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$

أ. أثبت أن (v_n) هندسية حدد أساسها وحدها الأول.

ب. أكتب v_n بدلالة n .

ج. أحسب $S = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

التمرين 6 :

نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{2u_n + 7}$ ونضع $v_n = \dfrac{2u_n - 1}{2u_n + 6}$

1 – أ. بين أن $0 < u_n < \dfrac{1}{2}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

ب. ادرس رتابة (u_n) .

2 – أ. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{8}\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)$.

ب. استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

3 – أ. بين أن المتتالية (v_n) هندسية حدد أساسها وحدها الأول.

ب. احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n واستنتج $\lim u_n$ و $\lim v_n$.

ج. احسب $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $\lim S_n$.

د. احسب $P_n = v_0.v_1........v_n$

التمرين 7 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$$ ونضع $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

1 – بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$.

2 – ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

3 – استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

4 – أ. بين أن المتتالية (v_n) حسابية حدد أساسها وحدها الأول.

ب. احسب نهاية المتتالية (u_n) بطريقة أخرى.

التمرين 8 :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{6x}{x^3 + 4}$

1 – حدد مجموعة تعريف الدالة f .

2 – بين أن f تقابل من $\left[0, \sqrt[3]{2}\right]$ نحو مجال يجب تحديده.

3 – نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

أ. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n < \sqrt[3]{2}$

ب. بين أن (u_n) تزايدية واستنتج أنها مقاربة واحسب $\lim u_n$.

التمرين 9 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 4$

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = x^2 - 3x + 4$

1 – بين أن $f([1,2]) \subset [1,2]$.

2 – بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \geq x$.

3 – استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 2$ وأن (u_n) تزايدية.

4 – استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

التمرين 10 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$

1 – بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 3$.

2 – ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

3 – بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 3 > \dfrac{3}{2}(u_n - 3)$.

التمرين 11 :

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بـ $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2 + U_n} \end{cases}$$

1 – أ. أثبت أن $U_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ب. أثبت أن $U_n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2 – أ. بين أن (U_n) تناقصية.

ب. استنتج أن (U_n) متقاربة.

3 – لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بـ : $V_n = \dfrac{U_n}{1 + U_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

أ. بين أن V_1 هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$.

ب. احسب V_n ثم U_n بدلالة n .

ج. احسب نهاية (U_n) .

التمرين 12 :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $I = [2,3]$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{5x + 2}{x + 3}$

1 - أ. أنشئ جدول تغيرات الدالة f على I .

ب. بين أن $f(I)(I)$.

2 – نعتبر المتتالية المعرفة كما يلي :

: $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

باستعمال السؤال (أ.) بين بالترجع أن :

أ. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2 \leq U_n \leq 3$

ب. المتتالية U_n تزايدية.

3 – بين أن المتتالية U_n متقاربة وحدد نهايتها.

التمرين13 :

نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 3u_n + 6}{u_n - 1} \end{cases}$$

1 – بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3 < u_n \leq 4$.

2 – ادرس رتابة (U_n) .

3 – بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(u_n - 3)$.

4 – استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

التمرين 14 :

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \quad , \quad v_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{2} \quad , \quad v_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4} \end{cases}$$

ونضع $a_n = u_n - v_n$ و $b_n = u_n + v_n$.

1 – أ. بين أن (a_n) هندسية ثم احسب a_n بدلالة n .

ب. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad b_n = 6$.

2 – استنتج u_n و v_n بدلالة n .

3 – احسب $\lim u_n$ و $\lim v_n$.

التمرين 15 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 2x + 1}$$

1 – أ. بين أن : $(\forall x \in I) : f(x) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + 1}$

ب. بين أن : $(\forall x \in I) : \frac{1}{x} - 1 \geq 0$

2 – بين أن f تزايدية قطعا على I .

3 – أ. بين أن f تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده.

ب. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

4 – حل في I المعادلة $f(x) = \frac{4}{5}$.

5 – نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{2} < u_n < 1$

ب. بين أن المتتالية (u_n) تزايدية.

ج. استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

التمرين 16 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

1 – بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 3$

2 – ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

3 – بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$

4 – استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

5 – هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

تمرين 17

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^3$

1 – حدد حيز تعريف الدالة f .

2 – أ. بين أن الدالة f تقابل من المجال $]-1, +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده.

ب. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

3 – نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = -\dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ. بين أن : $(\forall \in \mathbb{N}) : -1 < u_n < 0$

ب. بين أن المتتالية (u_n) تزايدية.

ج. حل في $]-1, +\infty[$ المعادلة $f(x) = x$ (ضع $t = \sqrt{x+1} - 1$).

د. بين أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 18 :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{4x^2+4}$

ونعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

1 – أ. ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}^+$.

ب. بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$.

ج. بين أن :

$$\left(\forall(x,y)\in[0,1]^2\right):\left|f(x)-f(y)\right|\le\frac{1}{2}|x-y|$$

2 – بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}):0<u_n\le\dfrac{1}{2}$.

3 – أ. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}):|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

ب. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة واحسب نهايتها.

تمرين19 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{6-u_n} \end{cases}$

1 – ادرس تغيرات $f(x)=\sqrt{6-x}$ وحدد $f([0,6])$.

2 – بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*):0\le u_n\le 6$.

3 – نضع $v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$.

بين أن $v_n\le w_n$ وأن (v_n) تزايدية و w_n تناقصية.

4 – بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}):|u_{n+1}-2|\le\dfrac{1}{2}|u_n-2|$ واستنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

5 – بين أن (v_n) و (w_n) متحاديتان وحدد نهايتهما المشتركة.

تمرين 20 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$a>0:\begin{cases} u_0\ge\sqrt[3]{a} \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2u_n+\dfrac{a}{u_n^2}\right) \end{cases}$$

1 – أ. بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):u_n>0$.

ب. بين أن :

$$(\forall n\in\mathbb{N}):u_{n+1}-\sqrt[3]{a}=\frac{\left(2u_n+\sqrt[3]{a}\right)}{3u_n^2}\left(u_n-\sqrt[3]{a}\right)^2 .$$

ج. قارن بين $\sqrt[3]{a}$ و u_n وبين أن (u_n) متقاربة.

2 – بين أن : $u_{n+1}-\sqrt[3]{a}-\dfrac{2}{3}\left(u_n-\sqrt[3]{a}\right)\le 0$. واستنتج $\lim u_n$.

تمرين21:

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقارية وتحقق : $(\forall n\in\mathbb{N}):\dfrac{1}{2}<x_n<1$

ونعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=x_0 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+x_{n+1}}{1+u_nx_{n+1}} \end{cases}$$

1 – أ. بين أن المتتالية (u_n) محدودة بـ 0 و 1.

ب. بين أن المتتالية (u_n) تزايدية واستنتج أن (u_n) متقاربة.

2 – أ. بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):x_n(-1+u_nu_{n+1})=u_{n-1}-u_n$.

ب. استنتج $\lim u_n$.

تمرين 21 :

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=a \quad , \quad v_0=b \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3} \quad , \quad v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4} \end{cases}$$ (مع $a<b$)

1 – أ. بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):0<u_n<v_n$.

ب. بين أن المتتالية (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية.

ج. استنتج أن (u_n) و (v_n) متقاربتان.

2 – نضع $w_n=v_n-u_n$ و $t_n=3u_n+8v_n$.

أ. بين أن المتتالية (w_n) هندسية و (t_n) ثابتة.

ب. احسب u_n و v_n بدلالة n ثم احسب $\lim v_n$ و $\lim u_n$.

تمرين 22 :

نعتبر المتتاليات (u_n) و (v_n) و (w_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=20 \quad ; \quad u_1=6 \\ u_{n+1}=-\dfrac{1}{20}u_n+\dfrac{1}{20}u_{n-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_n=u_{n+1}+\dfrac{1}{4}u_n \\ w_n=u_{n+1}-\dfrac{1}{5}u_n \end{cases}$$

1 – بين أن (v_n) و (w_n) متتاليتين هندسيتين.

2 – احسب w_n ، v_n ثم u_n بدلالة n . واحسب $\lim u_n$.

3 – احسب $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة u_n واستنتج $\lim S_n$.